Université Paris–Diderot (Paris 7) MT1–MM1

L1, Sciences exactes 2011–2012

Examen de seconde session du 18 juin 2011

Durée : 3 heures.

Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.

Dans cet exercice θ désignera un nombre réel.

1. Trouver les solutions Z complexes de l'équation : $Z^2 - 2\cos(\theta)\,Z + 1 = 0$.
2. Donner les solutions complexes des deux équations suivantes :
$$z^3 = e^{i\theta}, \qquad \text{et} \qquad z^3 = e^{-i\theta}.$$
3. Calculer le polynôme $(z - e^{i\frac{\theta}{3}})(z - e^{-i\frac{\theta}{3}})$ et montrer que ses coefficients sont des nombres réels.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que le polynôme suivant
$$z^6 - 2\cos(\theta)\; z^3 + 1$$
peut s'écrire comme produit de trois polynômes à coefficients réels et chacun de degré 2 que l'on écrira explicitement.

Exercice 2.

Soient $a < b$ deux réels, on considère une fonction f deux fois continument dérivable sur $[a, b]$. On veut montrer la propriété suivante :

$$\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que : } \frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c) \tag{1}$$

Pour montrer cette propriété, on pose, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2} - f\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{(x-a)^2}{8} A$$

avec A un réel.

1. Calculer $\varphi(a)$ et calculer $\varphi'(x)$, pour tout $x \in [a, b]$.
2. Montrer que l'on peut choisir A tel que $\varphi(b) = 0$. (Dans la suite, on suppose donc que le réel A est choisi tel que $\varphi(b) = 0$.)
3. Après avoir énoncé soigneusement le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$.
4. Après avoir énoncé soigneusement le théorème des accroissements finis, appliquer-le à la fonction f', sur l'intervalle $[\frac{a+\xi}{2}, \xi]$, et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f''(c)$.
5. Enfin, montrer que la propriété (1) est vérifiée.